

Marcação a Mercado e Marcação na Curva de Vencimento de Títulos Públicos Brasileiros: Aplicação da Expansão de Taylor na Divergência Entre as Rentabilidades Aferidas Pelas Referidas Técnicas de Valuation

Ricardo Bruno Pérez Ferreira, UFMG

Professor de finanças da UFMG
brunoperez.bh@gmail.com

Francisco Vidal Barbosa, UFMG

Professor da pós-graduação em finanças da UFMG
fbarbosa@face.ufmg.br

Marcação a Mercado e Marcação na Curva de Vencimento de Títulos Públicos Brasileiros: Aplicação da Expansão de Taylor na Divergência Entre as Rentabilidades Aferidas Pelas Referidas Técnicas de Valuation

Esse artigo analisa a divergência entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento na apuração da rentabilidade de títulos públicos brasileiros. Foram considerados os títulos: Letra Financeira do Tesouro (LFT), Letra do Tesouro Nacional (LTN) e Notas do Tesouro Nacional, series B (NTN-B), C (NTN-C) e F (NTN-F). A abordagem quantitativa foi baseada em Hull (1997) e no *Value at Risk* (VaR) de renda fixa, destacado por Crouhy et al (2004), conjugado com a divergência não planejada, aplicados sobre a rentabilidade diária apuradas pela marcação a mercado e pela marcação na curva de vencimento. Os dados foram obtidos na Secretaria do Tesouro Nacional (STN) e Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA), sendo sua frequência diária e com início em 01/02/2006. Os resultados demonstraram que, ao aplicar a abordagem baseada na expansão de Taylor, a rentabilidade indicada pelas duas técnicas de avaliação converge para o valor indicado na curva de vencimento.

Palavras-Chave: Títulos Públicos, Duração, Convexidade, Expansão de Taylor, Valuation.

Mark-to-market and marking on the maturity curve of government bonds in Brazil: applying the Taylor expansion of the divergence between the returns measured by these valuation techniques

This article analyzes, through a quantitative approach, the divergence between the mark-to-market to the mark to maturity curve in determining the yield of Brazilian government bonds over time. We considered the main Brazilian bonds: Letter Financial Treasury Bills (LFT), National Treasury Bills (LTN) and National Treasury Notes, Series B (NTN-B), C (NTN-C) and F (NTN-F). The quantitative approach was based on the procedure of Hull (1997) and Value at Risk (VaR) for fixed income, seconded by Crouhy et al (2004), in conjunction with a tracking error, implemented on the yield measured by daily mark-to-market and marking the maturity curve. The data were obtained from the National Treasury Secretariat (STN) and the Brazilian Association of Financial and Capital Markets (ANBIMA), with a daily frequency and beginning on 01/02/2006. The results obtained with applied Taylor expansion showed that yield indicated by the two techniques assessment bonds converges to the value indicated in the yield to maturity.

Keywords: Government Bonds, Duration, Convexity, Taylor Expansion, Valuation.

1. INTRODUÇÃO

Os termos “marcação a mercado” e “marcação na curva”, segundo o CONAPREV (2009), são utilizados no mercado financeiro para indicar a maneira como é obtido o valor de um título de renda fixa, ou seja, sua precificação. Por um lado, a marcação a mercado é o valor que seria obtido caso o título fosse vendido em um determinado momento no tempo. Essa alternativa de avaliação é adequada para a hipótese de o título ficar permanentemente disponível para negociação.

Por outro lado, a marcação na curva é uma abordagem que pode ser utilizada caso o título seja mantido em carteira, para ser resgatado somente no seu vencimento. Nessa situação, o valor do título corresponderá ao custo de aquisição, acrescido da atualização pelo indexador vinculado ao papel e dos juros, ambos calculados sobre o valor de face (valor de emissão) do título.

Diante disso, o escopo da pesquisa foi a análise de divergências entre a marcação a mercado e a rentabilidade pela curva de vencimento na precificação diária de títulos públicos brasileiros, de maneira a verificar o risco na avaliação desses títulos de renda fixa. Para isso, foi constatada o ajuste dessa volatilidade entre as referidas técnicas de precificação de um título público por meio de uma expansão de Taylor de segunda ordem como a sugerida na abordagem *Value at Risk* (VaR) de renda fixa, conforme Barros (2009).

Logo, o artigo objetiva a seguinte questão de pesquisa: qual o ajuste entre os resultados da marcação a mercado e da marcação na curva de vencimento propiciado pela aplicação de uma

expansão de Taylor de segunda ordem na divergência entre os resultados das referidas técnicas de avaliação da rentabilidade dos títulos públicos brasileiros?

Esse estudo contribui para a expansão do conhecimento ao desenvolver um estudo sobre as principais técnicas de avaliação dos títulos públicos brasileiros, o que é de interesse para instituições financeiras como bancos, fundos de investimentos, fundos de pensão e até para investidores individuais. A contribuição teórica envolve a aplicação da expansão de Taylor de segunda ordem para analisar a divergência entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento, o que contribui para trabalhos voltados para a gestão de riscos de renda fixa.

2. AS TÉCNICAS DE AVALIAÇÃO

Esta pesquisa enfoca a análise de divergências, ao longo do tempo, entre os valores dos investimentos em títulos públicos federais conforme a marcação a mercado ou a marcação na curva de vencimento. A possibilidade de utilização de uma dessas duas formas de obtenção do valor do título visa propiciar o registro contábil adequado a cada política de investimento, mas não altera o direito do investidor em relação ao título.

Ao adquirir o título, o investidor torna-se titular do direito de receber o valor aplicado acrescido da rentabilidade, quer seja adotada a marcação a mercado ou a marcação na curva. O que altera esse direito, contudo, é a possibilidade de venda do título antes do vencimento. No entanto, no momento de vencimento desses títulos de renda fixa, o valor indicado por essas duas abordagens converge para o valor obtido pelo resgate do principal no vencimento. Por isso, de acordo com a STN (2009), há os dois modos de contabilizar o título:

a) pela marcação a mercado, quando se considera a possibilidade de o título ser vendido a qualquer tempo, sem que isso cause alteração no seu valor contábil, uma vez que essa avaliação deve representar o valor do título no mercado;

b) pela marcação na curva, quando será efetuado o resgate do título pelo seu detentor somente no vencimento e não se espera que a contabilidade seja afetada pelas variações do seu valor no mercado, visto que tais variações não interferem na determinação do valor do título no vencimento.

Cabe enfatizar, em conformidade com a STN (2009), que essas duas metodologias de avaliação de investimentos em títulos públicos federais devem apresentar os mesmos resultados no momento de resgate dos títulos junto ao emissor. Assim, podem ser utilizados modelos que consideram movimentos de reversão à média – no caso, movimentos em que a marcação a mercado tende a convergir para a avaliação conforme a curva de vencimento –, visto que esse último método se baseia no compromisso de rentabilidade assumido pelo emissor do título de dívida.

Um comportamento similar importante sobre investimentos em títulos de renda fixa foi constatado por Hull e White (1990), que incorporam a tendência de reversão à média da taxa de juros vinculada a essas aplicações em títulos de renda fixa. Os referidos autores sugeriram estender os modelos, tornando a taxa de retorno à média, a volatilidade da taxa, ou ambas, em uma função do tempo. Logo, a abordagem a ser desenvolvida segue essa proposição, de maneira a consolidar um modelo analítico inspirado na construção de Hull e White (1990).

De acordo com Vieira Neto (1999), as taxas de juros reais apresentam uma tendência a se mover em direção a uma média de longo prazo. Como destacam Bastian-Pinto e Brandão (2007), a análise da dinâmica do preço de um ativo a ser modelada, às vezes, não segue um processo estocástico com um comportamento similar a um Movimento Geométrico Browniano, como, por exemplo, os fluxos de caixa de um projeto cujos preços dependem de uma média de longo prazo (e.g., commodities não financeiras).

3. DURATION E CONVEXIDADE: AJUSTES FRENTE A VARIAÇÕES NA TAXA DE JUROS

A *Duration* é uma medida da sensibilidade do preço de um título a mudanças na taxa de juros a que o título é descontado, as quais podem ocorrer ao longo do tempo. De acordo com Benninga (2000), trata-se de uma medida aplicada na quantificação do risco de um título: quanto maior a *Duration*, maior o risco.

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{t=1}^n \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{M}{(1+y)^n} = \frac{C}{1+y} + \frac{C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{C}{(1+y)^n} + \frac{M}{(1+y)^n} \\
 \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{(-1)C}{(1+y)^2} + \frac{(-2)C}{(1+y)^3} + \dots + \frac{(-n)C}{(1+y)^{n+1}} + \frac{(-n)M}{(1+y)^{n+1}} \quad (1) \\
 \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{(1+y)} \left[\frac{1C}{1+y} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n} \right]
 \end{aligned}$$

em que:

- P é o preço do título;
- y representa a taxa de juros;
- C se refere ao cupom a ser pago pelo título;
- M corresponde ao montante principal do título; e
- t consiste no tempo até o vencimento em n.

Na equação (1), o termo entre colchetes constitui o prazo médio ponderado até o vencimento dos fluxos de caixa do título e os pesos são os valores presentes dos fluxos de caixa. Ao dividir ambos os membros da equação por P, obtém-se a variação percentual de preço, decorrente da primeira derivada da expressão matemática para o valor presente do fluxo de caixa de um título.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{P} = -\frac{1}{(1+y)} \left[\frac{1C}{1+y} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{nC}{(1+y)^n} + \frac{nM}{(1+y)^n} \right] \frac{1}{P} \quad (2)$$

O termo entre colchetes dividido pelo preço é a *Duration* de Macaulay (DM):

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{tC}{(1+y)^t} + \frac{nM}{(1+y)^n}}{P} \quad (3)$$

A razão entre a *Duration* de Macaulay e $1+y$ é definida como *Duration* modificada (D^*):

$$D^* = \frac{D}{1+y} \Leftrightarrow \frac{dP}{dy} \frac{1}{P} = -D^* \quad (4)$$

Observa-se, pois, que existe uma relação inversa entre a *Duration* de Macaulay e a variação percentual aproximada de preço para uma dada variação de retorno, o que é de se esperar em função do princípio de que os preços de títulos variam no sentido contrário ao da variação das taxas de juros.

Como a *Duration* de Macaulay mede a inclinação da curva preço-retorno em um determinado ponto, essa relação gera uma aproximação linear à curva preço-juros que pode ser utilizada como uma medida de quantificação e controle de risco. No entanto, pode-se alcançar uma aproximação ainda mais precisa por meio da inclusão de um termo de segunda ordem. Trata-se da Convexidade, que representa a curvatura relativa de um determinado ponto na curva entre preço e retorno. A convexidade C é definida como:

$$C = \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dYTM^2} \quad (5)$$

em que:

$$\frac{d^2 P}{dYTM^2} = \sum_{t=1}^N \frac{t(t+1)C_t}{(1+YTM)^{t+2}} + \frac{n(n+1)M}{(1+YTM)^{n+2}} \quad (6)$$

Logo:

$$C = \frac{1}{P(1+YTM)^2} \sum_{t=1}^N \frac{t(t+1)C_t}{(1+YTM)^t} + \frac{n(n+1)M}{(1+YTM)^n} \quad (7)$$

A convexidade é uma média ponderada de $t(t+1)$, sendo que, de modo semelhante à duração, os pesos são proporcionais ao valor presente dos fluxos de caixa correspondentes. O resultado é modificado pelo fator $1/(1 + YTM)^2$.

Supondo-se que, a um preço P e um YTM correspondente, são calculadas a Duração Modificada e a Convexidade, então ΔYTM tende a zero e ΔP é a mudança correspondente no preço.

$$\Delta P \approx -D_M P \Delta YTM + \frac{PC}{2} (\Delta YTM)^2 \quad (8)$$

A expressão (8) constitui uma aproximação de segunda ordem para a curva preço-retorno, em que modificações na YTM implicam em variações no preço do título. Essa variação no preço constitui em um fator de risco, o que é objeto de análise por meio da conjugação da *Duration* com a Convexidade. Tal abordagem pode ser aplicada em estudos como o *Value at Risk* (VaR) de renda fixa, como destaca Crouhy et al (2004).

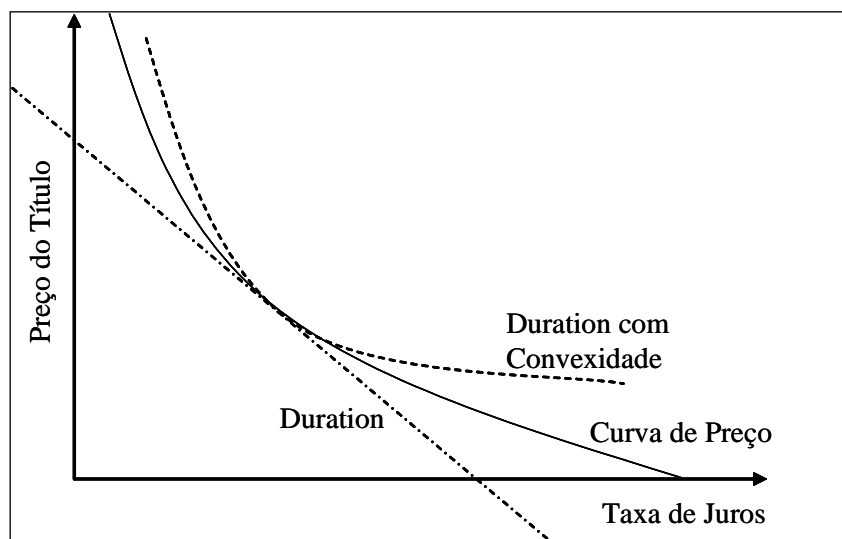
Nesse sentido, uma função f pode ser aproximada em uma região adjacente a um dado ponto x_0 utilizando-se as derivadas dessa função. A aproximação de segunda ordem é definida, então, como:

$$f(x + \Delta x) = f'(x_0) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0) (\Delta x)^2 \quad (9)$$

Ao analisar a variação no preço de um título decorrente de variações na taxa de juros, a *Duration* pode ser aplicada no estudo de variações entre o preço definido pela marcação a mercado de um título frente a sua marcação na curva de vencimento, pois essa divergência pode estar relacionada às variações na taxa de juros. Assim, como destacam Carcano e Dall'O (2011), a *Duration* contribui com o desenvolvimento da análise da divergência entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento de um título público ao incorporar a sensibilidade do título a mudanças na taxa de juros.

A convexidade de um título, assim como a *Duration*, é uma medida de análise da inclinação da curva preço-retorno em um determinado ponto, que busca alcançar uma aproximação ainda mais precisa por meio da inclusão de um termo de segunda ordem, de maneira a obter uma aproximação linear à curva preço-juros que pode ser utilizada como uma medida de quantificação e controle de risco. A convexidade representa a curvatura relativa do preço de um título às modificações na sensibilidade do título à variação da taxa de juros.

Figura 1: Aproximação do preço de um título por meio da *Duration* e da convexidade.



Fonte: Barros (2009)

Assim, a convexidade pode ser aplicada na avaliação de divergências entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento, pois verifica a variação da sensibilidade do preço do título a mudanças na taxa de juros, de maneira a suplementar a mensuração efetuada por meio da duração. Portanto, como enfatizam Lajili e Rakotondratsimba (2012), tanto a *Duration* quanto a convexidade envolvem a análise da variação do preço de um título público a mudanças na taxa de juros, a *Duration* contribui com a incorporação da inclinação em um ponto na curva preço-juros e a convexidade com a curvatura nesse mesmo ponto da curva preço-juros, assim são medidas matemáticas voltadas para a análise da variação do preço de títulos públicos, que podem repercutir em divergências entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento.

4. APLICAÇÃO DA EXPANSÃO DE TAYLOR NA ANÁLISE DA DIVERGÊNCIA ENTRE A MARCAÇÃO A MERCADO E O VALOR NA CURVA DE TÍTULOS PÚBLICOS

A medida de risco Divergência não Planejada (*DnP*), segundo Pena (2005), consiste em uma técnica que avalia um desvio registrado no desempenho dos investimentos em relação à meta de rentabilidade ou ao indexador estipulado para um fundo ou ativo de investimento de renda fixa – como no caso deste estudo, títulos públicos brasileiros.

O cálculo por meio dessa técnica parte da diferença entre a rentabilidade dos investimentos em relação a um referencial de desempenho como, no contexto desta pesquisa, a rentabilidade prevista pela curva de vencimento de um título público, fator que a consolida como uma medida de risco baseada em técnicas de *tracking error*. A *DnP* é obtida pela diferença entre a rentabilidade dos investimentos e o referencial:

$$DnP = r_t - I_t \quad (10)$$

em que:

r_t é o retorno do fundo no momento t ; e

I_t corresponde à meta do referencial no momento t .

Logo, a *DnP* permite verificar se os retornos dos investimentos (segundo marcação a mercado) apresentam desempenho superior ou não ao determinado pelo referencial contratado (marcação na curva de vencimento) no título público ao longo do tempo. Essa técnica é voltada para a detecção de possíveis divergências na dinâmica dos retornos dos investimentos em relação ao referencial ou benchmark. Conjugada com o *Expected Shortfall* (ES) constitui uma medida coerente de risco, conforme salientam Artzner et al. (1997, 1999). Em outras palavras, os retornos líquidos dos investimentos em relação a uma meta de desempenho, de acordo com Rockafellar et al. (2003), representa uma medida consistente de desvio.

A técnica da *DnP* foi conjugada com uma série de Taylor de segunda ordem conforme expressão (9). Assim, com base na abordagem apresentada por Hull (1997) para a aproximação de segunda ordem, pode-se definir que:

F é o rendimento do título conforme a curva de vencimento com maturidade em T ;

$P(y)$ corresponde ao preço do título no momento t como função de seu rendimento y segundo a marcação a mercado; e

σ refere-se à medida de volatilidade do rendimento do título.

A expansão de $P(y)$ numa série de Taylor de segunda ordem, pressupondo-se $y = F$, resulta em:

$$P(y) \approx P(F) + (y - F)P'(F) + \frac{1}{2}(y - F)^2 P''(F) \quad (11)$$

Em que $P'(y)$ e $P''(y)$ são, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas parciais do preço do título em relação ao seu rendimento conforme a marcação a mercado. Diante disso, mediante uma situação de neutralidade ao risco, verifica-se o seguinte resultado:

$$\hat{E}[P(y)] \approx P(F) + [\hat{E}(y) - F]P'(F) + \frac{1}{2}F^2 \sigma^2 P''(F)T \quad (12)$$

Se $\hat{E}[P(y)]$ é a estimativa do preço do título na marcação a mercado em uma situação de neutralidade ao risco; então, pela definição de F , tem-se que:

$$\hat{E}[P(y)] = P(F) \quad (13)$$

Pois, na situação de neutralidade ao risco têm-se as seguintes tendências à zero:

$$y - F \rightarrow 0 \quad (i)$$

$$\hat{E}(y) - F \rightarrow 0 \quad (ii)$$

$$\sigma^2 \rightarrow 0 \quad (iii)$$

Assim, verifica-se uma convergência no preço do título para seu valor na marcação na curva mediante uma situação de neutralidade de risco, decorrente de (i), (ii) e (iii), de modo que tenha a passagem da equação (12) para (13).

Logo, segundo Hull (1997), como $\hat{E}[P(y)] - P(F) = 0$, tem-se que:

$$[\hat{E}(y) - F] \approx -\frac{1}{2} F^2 \sigma^2 \frac{P''(F)T}{P'(F)} \quad (14)$$

Portanto, uma estimativa para o rendimento esperado de um título é definida por:

$$\hat{E}(y) \approx F - \frac{1}{2} F^2 \sigma^2 T \frac{P''(F)}{P'(F)} \quad (15)$$

O quociente $P''(F) / P'(F)$ deve estar associado à expectativa de variação do preço do título frente uma variação na taxa de juros, conforme a expansão de Taylor de segunda ordem.

Uma estimativa para σ_i é dada pela expressão a seguir:

$$\sigma_i = \sqrt{DnP_i^2} \quad (16)$$

em que $DnP_i = y_i - F_i$ é a divergência entre a rentabilidade pela marcação a mercado e a rentabilidade pela marcação na curva de vencimento no momento de tempo i .

Assim, a partir da conjugação das expressões (15) e (16), é estruturada a abordagem aplicada nessa pesquisa em que se verifica o efeito da volatilidade entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento na expectativa de retorno $\hat{E}(y)$ de uma aplicação em um título público federal em operações no mercado secundário. Conforme mostra a expressão (17), essa divergência implica um preço influenciado: pelo tempo até o vencimento do contrato; pelas as variações das taxas de juros no mercado financeiro; e pelo desvio do valor de marcação a mercado frente ao valor nominal da marcação na curva de vencimento.

$$\hat{E}(y) \approx F_i - \frac{1}{2} \left[F_i^2 T_i \frac{P''(F_i)}{P'(F_i)} \right] \cdot \sigma_i^2 \quad (17)$$

Além disso, cabe destacar que a estimativa do retorno de um título público deve apresentar relação com a expectativa de variação do indexador relacionado ao contrato, como, por exemplo, a taxa de juros e índices de inflação, o que é incorporado pelo termo $\frac{P''(F)}{P'(F)}$.

5. MÉTODO E DADOS

Por meio dos *softwares* @risk 5.5 ® e do Excel 7 ® foram calculados: rentabilidade pela marcação a mercado, rentabilidade pela marcação na curva de vencimento, *Duration*, convexidade, DnP entre as rentabilidades apuradas pelas duas técnicas, prazo para vencimento de cada um dos títulos considerados no estudo. Cabe ressaltar que os títulos considerados foram os papéis LFT, LTN, NTN-B, NTN-C e NTN-F, com vencimento entre 01/02/2006 e 31/08/2010.

Para desenvolver essa análise acerca de divergência entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento dos títulos públicos brasileiros, as seguintes atividades foram realizadas:

1. Aprofundamento dos procedimentos relacionados às técnicas de avaliação de títulos públicos brasileiros marcação a mercado e marcação na curva de vencimento.
2. Coleta de dados diários relativos aos preços de títulos públicos federais segundo a marcação a mercado e aos preços aferidos segundo a marcação na curva de vencimento de cada papel. A amostra considerou os títulos públicos LFT, LTN, NTN-B, C e F, com vencimento entre 01/02/2006 e 31/08/2010, sendo composta por dados diários disponíveis na Associação Nacional das Instituições do Mercado Financeiro (ANBIMA), também relativos ao período entre 01/02/2006 e 31/08/2010. Além dessa base de dados, também foi consultado a Secretaria do Tesouro Nacional (STN), que disponibiliza informações sobre títulos públicos federais no site http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro_direto/historico.asp.
3. Cálculo tanto da rentabilidade diária indicada pela marcação na curva de vencimento e quanto da rentabilidade diária pela marcação a mercado conforme a variação do preço divulgada pela ANBIMA.
4. Aferição de possíveis divergências entre os preços dos títulos públicos apurados pelas duas técnicas citadas no passo anterior. As divergências serão aferidas por meio da técnica Divergência não Planejada (DnP), sendo que a convergência entre a marcação a

mercado e a marcação na curva de vencimento ocorria no final da série histórica de observações de cada título público considerado na pesquisa.

5. Cálculo de $P'(F)$ e $P''(F)$ de cada título considerado na amostra.
6. Conjugação dos resultados das duas etapas anteriores na equação (17) e desenvolvimento de uma análise estatística acerca da divergência entre os resultados da equação (17) e da rentabilidade indicada pela curva de vencimento, que reflete a rentabilidade prometida pelo emissor e que será obtida no vencimento do título. Com isso constata-se uma possível convergência mediante a aplicação da expansão de Taylor na divergência entre as rentabilidades indicadas pelas técnicas marcação a mercado e carregamento pela curva de vencimento.

Para avaliar esse ajuste propiciado pela expansão de Taylor, foi aplicado um teste chi-quadrado para aferir a distribuição frequência dos resultados diários da subtração entre a estimativa dada por (17) e a rentabilidade pela curva de vencimento. O teste chi-quadrado χ^2 identifica o ajuste de uma distribuição de frequência a uma tipologia predeterminada, por meio da seguinte aferição:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \left[\frac{(N_i - E_i)^2}{E_i} \right] \quad (18)$$

Em que:

N_i é a observação i-ésima; e

E_i é a expectativa para a i-ésima observação conforme uma distribuição predeterminada.

O teste χ^2 foi aplicado para comparar os resultados da análise quantitativa frente às seguintes distribuições de frequência: inversa de Gauss, valor extremo, uniforme, log-normal, triangular, beta generalizado, log-logística, normal, pareto, exponencial, Pearson, logística, weibull. Na análise foram utilizadas distribuições contínuas que foram comparadas com os resultados para a marcação a mercado, marcação na curva, divergência entre as técnicas e ajuste entre a expansão de Taylor e a curva de vencimento, e o teste de aderência foi mensurado por meio do *software @risk 5.5*®.

6. RESULTADOS

Inicialmente, serão apresentados os títulos LFT, pois foram os que apresentaram maior participação no mercado de títulos públicos; na sequência, as LTN; e, posteriormente, NTN-F, NTN-B e NTN-C. Além disso, nas figuras e tabelas são destacados os resultados para títulos que

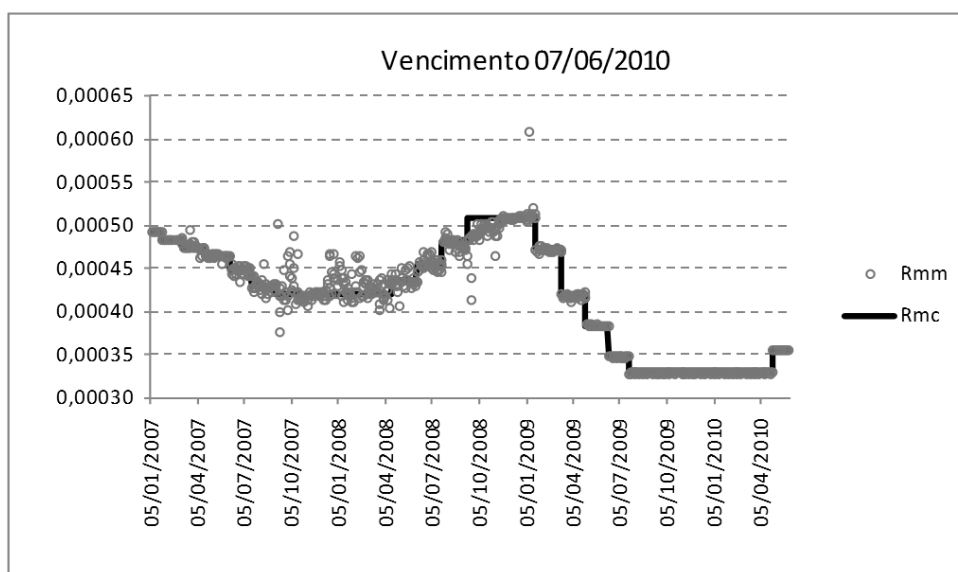
apresentaram vastos históricos de cotações, visto que na pesquisa foram avaliados todos os títulos com vencimento entre 01/02/2006 e 31/08/2010.

6.1. Letras Financeiras do Tesouro (LFT)

Os títulos LFT são papéis da dívida pública brasileira, indexados à variação da taxa de juros do Sistema Especial de Liquidação e Custódia (SELIC), definida pelo Banco Central do Brasil, o que constitui a taxa da política monetária brasileira. A partir da emissão de uma LFT, seu detentor perceberá a correção diária do preço desse título público pela taxa SELIC pelo Tesouro Nacional. Essa atualização do valor do principal da LFT também é verificada no mercado secundário de títulos públicos, de modo que se constata divergências entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento.

Na figura 2, a seguir, são destacadas a rentabilidade pela marcação a mercado (Rmm) e a rentabilidade pela marcação na curva (Rmc) do título LFT, com vencimento em 07/06/2010.

Figura 2: Rentabilidade indicada pela marcação a mercado (Rmm) e marcação na curva (Rmc) dos títulos LFT com vencimento em 07/06/2010.



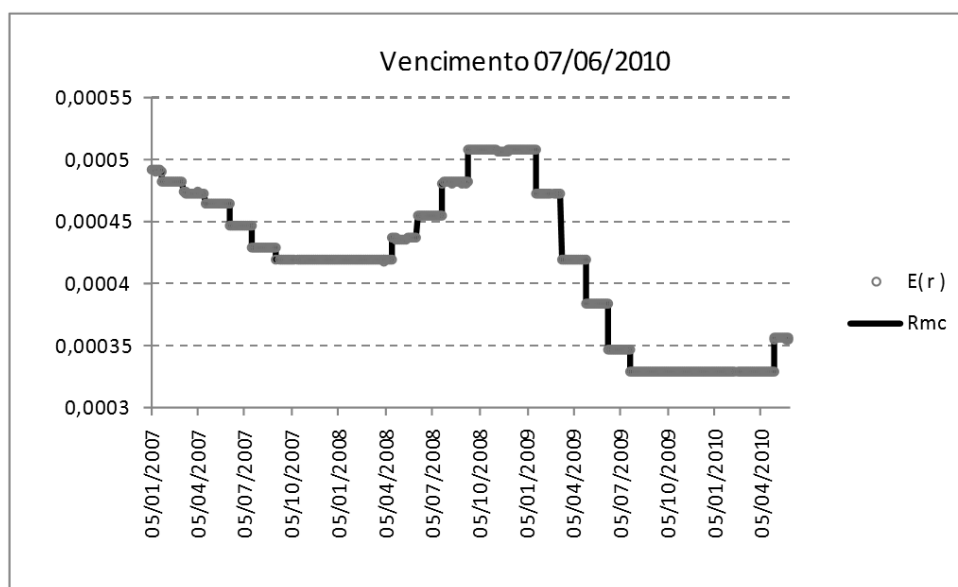
Fonte: Elaborado pelos autores.

Pela figura, pode-se constatar que a rentabilidade indicada pela marcação a mercado (Rmm) distribui-se em torno da rentabilidade indicada pela marcação na curva de vencimento (Rmc). Essa volatilidade é maior nas observações iniciais e, na proximidade do vencimento da LFT, as duas técnicas de avaliação apresentam resultados aproximados.

Juntamente com os dados da negociação diária dos títulos LFT, foram calculadas a *Duration*, a convexidade, a função para a rentabilidade decorrente da expansão de Taylor de 2º. Grau, a

DnP e o desvio σ obtido para os resultados diários. Os resultados para a função (17) foram próximos aos verificados pela marcação na curva de vencimento para os títulos com vencimento em 2010, como pode ser observado na figura a seguir:

Figura 3: Rentabilidade indicada pela expansão de Taylor ($E(r)$) e marcação na curva (R_{mc}) do título LFT com vencimento em 07/06/2010.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Para comparar os resultados da expansão de Taylor com a marcação na curva de vencimento, foi aferida a DnP para os resultados diários apurados para as LFT pesquisadas.

Tabela 1: Estatísticas descritivas da DnP entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos LFT, com vencimento em 07/06/2010

DnP	Entre marcação a mercado e a marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	Observada	Log-logística	Observada	Valor Extremo
Mínimo	-9,40E-05	-0,0002402	-1,36E-10	$-\infty$
Máximo	0,0001	$+\infty$	0	$+\infty$
Média	1,56E-07	-2,98E-07	-1,79E-12	7,00E-12
Moda	-3,96E-11	-5,55E-07	0,00E+00	-8,52E-12
Mediana	-6,60E-11	-4,14E-07	-6,15E-15	1,34E-12
Desvio Padrão	1,13E-05	7,47E-06	8,66E-12	3,45E-11

Tabela 1: Estatísticas descritivas da *DnP* entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos LFT, com vencimento em 07/06/2010

DnP	Entre marcação a mercado e a marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	Assimetria	1,258	0,1497	-9,6582
Curtose	25,4358	4,2553	117,7586	5,4
Percentil				
5%	-1,30E-05	-1,22E-05	-6,33E-12	-3,80E-11
10%	-8,00E-06	-9,29E-06	-2,83E-12	-3,09E-11
15%	-5,00E-06	-7,45E-06	-1,49E-12	-2,57E-11
20%	-3,00E-06	-6,05E-06	-7,77E-13	-2,13E-11
25%	-2,00E-06	-4,89E-06	-4,42E-13	-1,73E-11
30%	-1,00E-06	-3,87E-06	-2,38E-13	-1,35E-11
35%	-1,00E-06	-2,95E-06	-1,64E-13	-9,82E-12
40%	-2,41E-10	-2,08E-06	-5,57E-14	-6,17E-12
45%	-1,21E-10	-1,24E-06	-2,89E-14	-2,47E-12
50%	-6,60E-11	-4,14E-07	-6,15E-15	1,34E-12
55%	-1,56E-11	4,13E-07	-2,41E-15	5,32E-12
60%	3,71E-11	1,26E-06	-2,42E-16	9,55E-12
65%	9,51E-11	2,15E-06	0,00E+00	1,41E-11
70%	1,68E-10	3,10E-06	0,00E+00	1,92E-11
75%	3,50E-07	4,15E-06	0,00E+00	2,50E-11
80%	1,36E-06	5,36E-06	0,00E+00	3,18E-11
85%	3,00E-06	6,83E-06	0,00E+00	4,03E-11
90%	7,00E-06	8,80E-06	0,00E+00	5,20E-11
95%	1,50E-05	1,20E-05	0,00E+00	7,14E-11
Chi-Quadrado	n. a.	3170,9847	n. a.	9,97E+03
P-Valor	n. a.	0	n. a.	0

Fonte: Elaborado pelos autores.

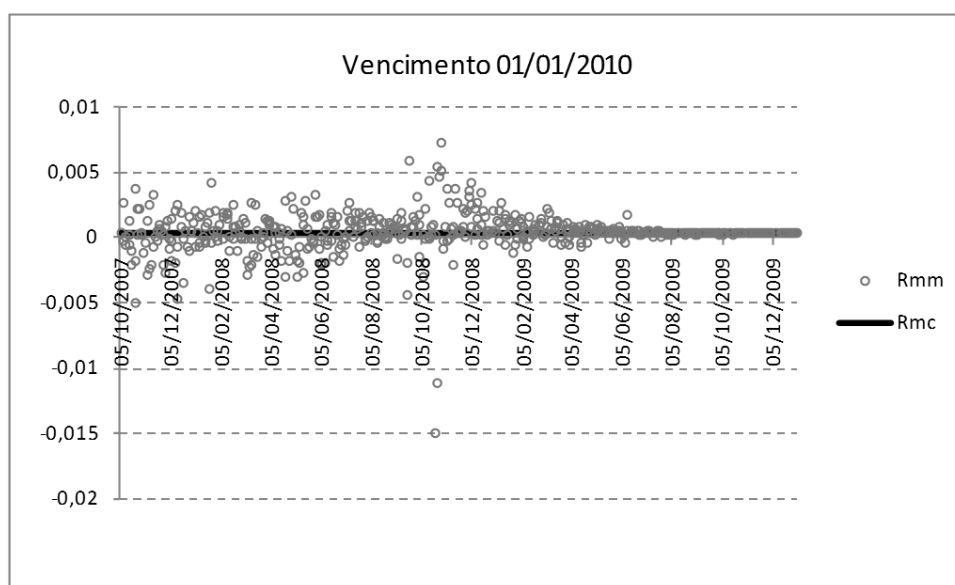
Como pode ser observado na tabela 1, anterior, a aproximação de Taylor ajusta os resultados obtidos pela marcação a mercado à rentabilidade diária indicada pelo carregamento na curva de vencimento. A divergência aferida foi inferior a 1% para os títulos LFT analisados, de modo que o ajuste pela *Duration* conjugada à convexidade por meio de uma série de Taylor de segundo grau adequou o valor de mercado da LFT com o indicado pela curva de vencimento do papel.

6.2. Letras do Tesouro Nacional (LTN)

Os papéis LTN são títulos prefixados com pagamento do principal, no valor unitário de R\$1000,00, no vencimento. Na emissão da LTN é definida a taxa de juros que determina o preço de emissão do título no mercado primário, sendo que esse título público pode ser negociado por outros valores no mercado secundário.

Na figura 4, a seguir, se destacam a rentabilidade conforme a marcação a mercado (R_{mm}) e segundo a marcação na curva de vencimento (R_{mc}) para os títulos LTN considerados na pesquisa com vencimento em 01/01/2010.

Figura 4: Rentabilidade indicada pela marcação a mercado (R_{mm}) e marcação na curva (R_{mc}) dos títulos LTN com vencimento em 01/01/2010.

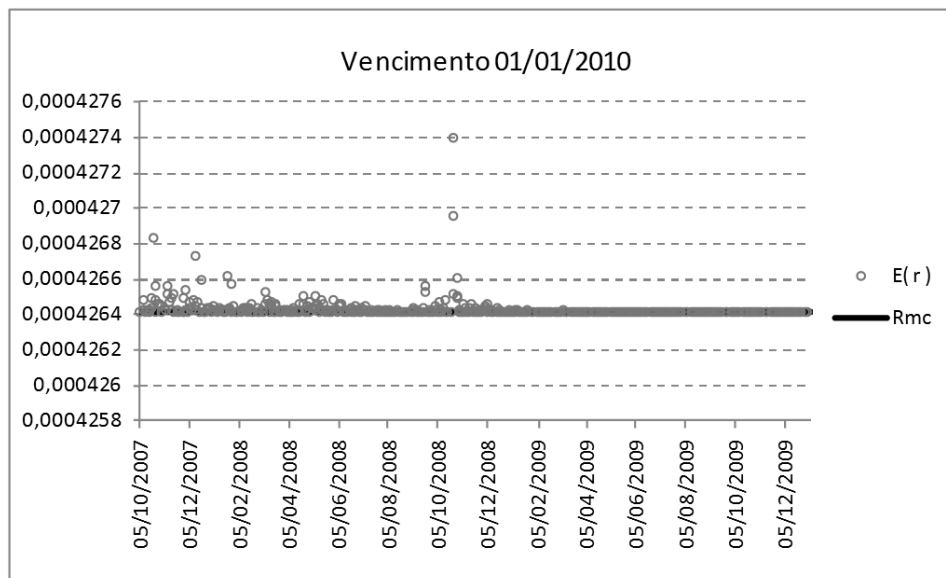


Fonte: Elaborado pelos autores.

Pode-se observar que a rentabilidade diária indicada pela marcação a mercado (R_{mm}) distribui-se em torno da rentabilidade fixa indicada pela marcação na curva de vencimento (R_{mc}). A volatilidade entre as duas técnicas de avaliação diminui com a aproximação do vencimento do título público, quando ocorre a convergência de valor da LTN com seu resgate junto ao Tesouro Nacional.

Os resultados para a expansão de Taylor, ou seja, equação (17) foram próximos aos verificados na curva de vencimento, como pode ser observado na figura 5, a seguir:

Figura 5: Rentabilidade indicada pela expansão de Taylor ($E(r)$) e marcação na curva (R_{mc}) dos títulos LTN com vencimento em 2010.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Com a aplicação da expressão (17) são incorporados os efeitos da Duration e da convexidade, ou seja, respectivamente, da taxa de variação e da mudança dessa taxa sobre o preço da LTN frente a alterações nos juros. Assim, por meio da expansão de Taylor os resultados da marcação a mercado foram ajustados aos da curva de vencimento, o que indica a convergência entre as duas técnicas de avaliação.

Tabela 2: Estatísticas descritivas da DnP entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos LTN, com vencimento em 01/01/2010

DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	Observada	Logística	Observada	Inv Gauss
Mínimo	-1,54E-02	$-\infty$	0,00E+00	-9,75E-12
Máximo	6,90E-03	$+\infty$	9,78E-07	$+\infty$
Média	1,31E-06	3,24E-05	1,47E-08	1,47E-08
Moda	-9,80E-05	3,24E-05	6,25E-16	2,17E-12

Tabela 2: Estatísticas descritivas da DnP entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos LTN, com vencimento em 01/01/2010

DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	Mediana	-6,74E-05	3,24E-05	7,31E-10
Desvio Padrão	1,51E-03	1,17E-03	5,74E-08	2,98E-07
Assimetria	-2,5463	0	11,0579	60,8069
Curtose	30,0433	4,2	162,1919	6165,4579
Percentil				
5%	-2,27E-03	-1,87E-03	1,33E-13	-4,50E-13
10%	-1,18E-03	-1,39E-03	4,84E-13	3,45E-12
15%	-7,94E-04	-1,09E-03	1,11E-12	7,47E-12
20%	-5,28E-04	-8,63E-04	2,32E-12	1,20E-11
25%	-3,06E-04	-6,77E-04	5,11E-12	1,72E-11
30%	-1,71E-04	-5,15E-04	1,55E-11	2,34E-11
35%	-1,16E-04	-3,67E-04	5,78E-11	3,10E-11
40%	-9,83E-05	-2,29E-04	1,67E-10	4,05E-11
45%	-9,26E-05	-9,72E-05	3,26E-10	5,26E-11
50%	-6,77E-05	3,24E-05	7,21E-10	6,84E-11
55%	-3,42E-06	1,62E-04	1,19E-09	8,96E-11
60%	5,31E-05	2,94E-04	1,94E-09	1,19E-10
65%	1,43E-04	4,32E-04	2,88E-09	1,62E-10
70%	3,28E-04	5,79E-04	4,93E-09	2,28E-10
75%	4,82E-04	7,42E-04	7,73E-09	3,37E-10
80%	7,22E-04	9,27E-04	1,32E-08	5,36E-10
85%	1,03E-03	1,15E-03	2,00E-08	9,63E-10
90%	1,44E-03	1,45E-03	3,36E-08	2,16E-09
95%	2,14E-03	1,93E-03	6,83E-08	8,31E-09
Chi-Quadrado	n. a.	461,1317	n. a.	1,07E+03

Tabela 2: Estatísticas descritivas da DnP entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos LTN, com vencimento em 01/01/2010

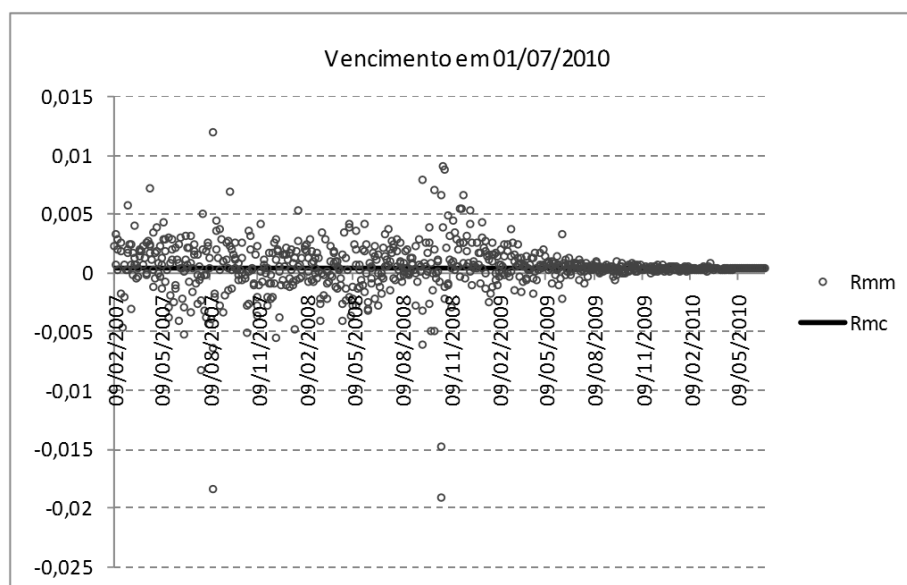
DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
P-Valor	n. a.	0	n. a.	0

Fonte: Elaborado pelos autores.

6.3. Notas do Tesouro Nacional tipo F (NTN-F)

Os títulos NTN-F são prefixados como os papéis LTN, porém garantindo o pagamento de cupons semestrais ao titular. O principal e os cupons são definidos no momento de emissão do título pela STN, sendo que possíveis deságios negociados em uma transação no mercado secundário são incorporados na taxa de desconto prefixada.

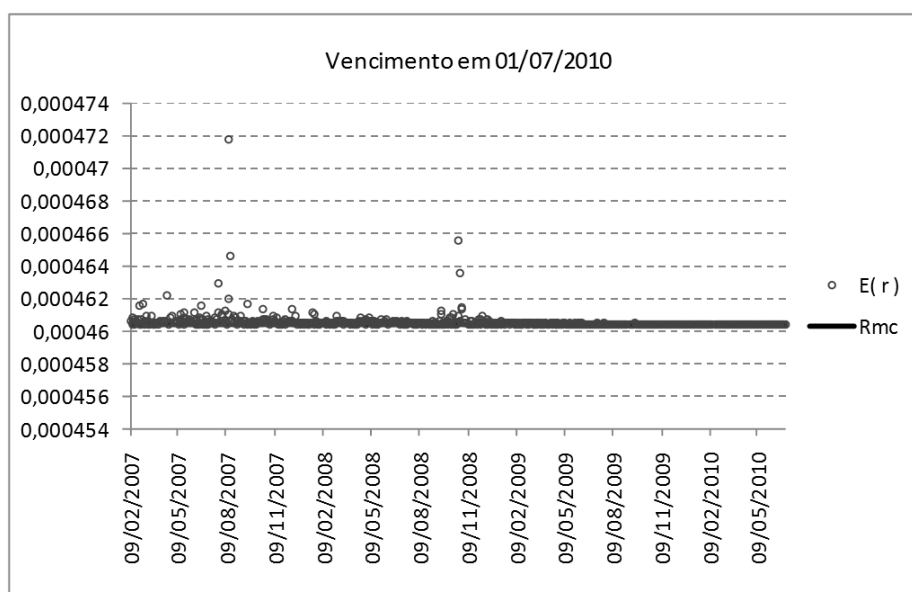
Figura 6: Rentabilidade indicada pela marcação a mercado (Rmm) e marcação na curva (Rmc) dos títulos NTN-F com vencimento em 01/07/2010.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Os resultados para a expressão (17) foram próximos aos verificados pela marcação na curva de vencimento, como pode ser observado na figura 7, a seguir:

Figura 7: Rentabilidade indicada pela expansão de Taylor ($E(r)$) e marcação na curva (R_{mc}) dos títulos NTN-F com vencimento 01/07/2010.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Como se pode observar, os resultados para a função baseada na expansão de Taylor foram próximos aos verificados pela marcação na curva de vencimento. No entanto, nos momentos em que se verificam as maiores divergências entre a marcação na curva e a marcação a mercado, constatou-se uma dissonância entre os resultados da função frente à marcação na curva.

Tabela 3: Estatísticas descritivas da DnP entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos NTN-F, com vencimento em 01/07/2010

DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	Observada	Logística	Observada	Inversa Gauss
Mínimo	-1,96E-02	$-\infty$	0,00E+00	-9,52E-11
Máximo	1,15E-02	$+\infty$	0,00E+00	$+\infty$
Média	5,08E-06	4,69E-05	1,13E-05	-2,67E-08
Moda	-7,57E-05	4,69E-05	9,80E-08	9,80E-08
Mediana	-7,67E-05	4,69E-05	1,04E-15	3,10E-11
Desvio Padrão	2,08E-03	1,65E-03	4,84E-09	7,29E-10

Tabela 3: Estatísticas descritivas da *DnP* entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos NTN-F, com vencimento em 01/07/2010

DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	Assimetria	-2,0319	0	4,92E-07
Curtose	25,4226	4,2	16,3426	48,3167
Percentil				
5%	-3,09E-03	-2,63E-03	2,76E-12	3,16E-12
10%	-1,77E-03	-1,95E-03	8,27E-12	4,44E-11
15%	-1,18E-03	-1,53E-03	2,23E-11	8,69E-11
20%	-7,42E-04	-1,21E-03	4,83E-11	1,34E-10
25%	-4,47E-04	-9,51E-04	8,45E-11	1,90E-10
30%	-2,68E-04	-7,23E-04	2,05E-10	2,55E-10
35%	-1,99E-04	-5,15E-04	4,73E-10	3,36E-10
40%	-1,33E-04	-3,21E-04	1,12E-09	4,36E-10
45%	-1,08E-04	-1,35E-04	2,19E-09	5,63E-10
50%	-7,70E-05	4,69E-05	4,81E-09	7,29E-10
55%	-8,51E-06	2,29E-04	8,39E-09	9,53E-10
60%	1,18E-04	4,15E-04	1,43E-08	1,26E-09
65%	2,26E-04	6,09E-04	2,41E-08	1,72E-09
70%	4,02E-04	8,16E-04	3,77E-08	2,41E-09
75%	7,32E-04	1,04E-03	5,37E-08	3,54E-09
80%	1,13E-03	1,31E-03	7,92E-08	5,62E-09
85%	1,52E-03	1,62E-03	1,31E-07	1,00E-08
90%	2,01E-03	2,04E-03	2,00E-07	2,23E-08
95%	2,73E-03	2,72E-03	3,96E-07	8,37E-08
Chi-Quadrado	n. a.	536,0258	n. a.	1,16E+03
P-Valor	n. a.	0	n. a.	0

Fonte: Elaborado pelos autores.

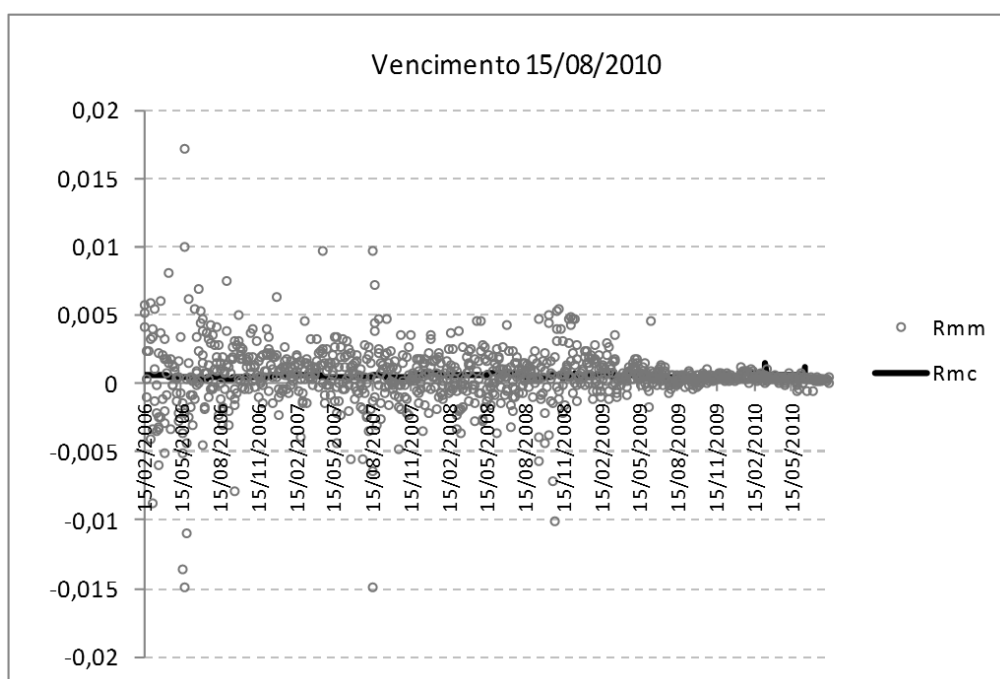
A divergência entre os resultados da rentabilidade diária pela marcação na curva e a análise pela segunda expansão de Taylor foram centesimais frente aos valores de desempenho diário de rendimento dos títulos NTN-F pesquisados. Tal evento é um reflexo da aproximação dos resultados por meio da expansão de Taylor para a rentabilidade diária de um título NTN-F, o qual, teoricamente, deve seguir o comportamento da marcação na curva.

6.4. Notas do Tesouro Nacional tipo B (NTN-B)

Os títulos NTN-B são indexados ao índice de inflação IPCA, garantindo ao investidor uma remuneração atrelada à variação do indexador acrescido de uma taxa fixa, delimitada na aquisição do título de renda fixa. Além disso, a rentabilidade desse título pode ser aferida pela variação de seu preço no mercado secundário de títulos públicos, o que pode ser obtido no site da ANBIMA.

Os resultados para a marcação a mercado e marcação na curva da NTN-B com vencimento em 15/08/2010 são apresentados na figura 8, a seguir.

Figura 8: Rentabilidade indicada pela marcação a mercado (Rmm) e marcação na curva (Rmc) dos títulos NTN-B com vencimento em 15/08/2010.



Fonte: Elaborado pelos autores.

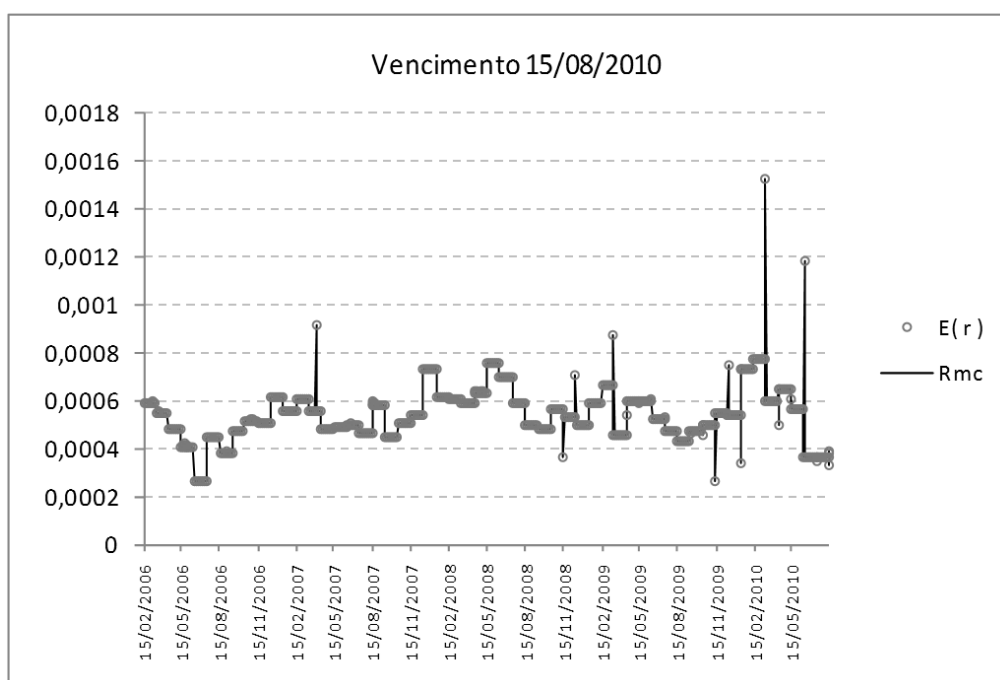
A rentabilidade pela marcação a mercado é mais volátil do que a verificada na marcação na curva. Essa volatilidade entre as duas técnicas de avaliação vai decaindo à medida que se aproxima a data de vencimento dos títulos, o que decorre da convergência do valor dos títulos

mensurado pelas técnicas de avaliação na data de vencimento, ou seja, na liquidação desses títulos pelo Tesouro Nacional.

Cabe enfatizar que instituições financeiras que optaram pela marcação na curva de investimentos em NTN-B verificaram uma volatilidade inferior na rentabilidade dessas aplicações frente a investidores que adotaram a marcação a mercado. Logo, avaliações de risco de instituições que seguiram a marcação na curva indicaram uma menor exposição a perdas do que as verificadas pela marcação a mercado. Contudo, essa redução da exposição de risco por meio da utilização da marcação na curva de vencimento de uma NTN-B implica a necessidade de sua manutenção na carteira até o vencimento ou mediante uma situação de extrema necessidade de liquidez demandada pela instituição financeira.

Os resultados para a expansão de Taylor foram próximos aos verificados pela marcação na curva de vencimento, como pode ser observado na figura 9, a seguir:

Figura 9: Rentabilidade indicada pela expansão de Taylor ($E(r)$) e marcação na curva (R_{mc}) dos títulos NTN-B com vencimento em 15/08/2010.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na tabela 4, adiante, são destacados os resultados da DnP entre a marcação a mercado e o retorno pela curva de vencimento e, também, a rentabilidade aferida por meio da expansão de Taylor frente a marcação na curva.

Tabela 4: Estatísticas descritivas da *DnP* entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos NTN-B, com vencimento em 15/08/2010

DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	Observada	Logística	Observada	Normal
Mínimo	-1,56E-02	$-\infty$	-1,44E-05	$-\infty$
Máximo	1,68E-02	$+\infty$	0,00E+00	$+\infty$
Média	-1,69E-05	4,23E-06	-2,16E-07	-2,16E-07
Moda	-2,07E-05	4,23E-06	-3,84E-16	-2,16E-07
Mediana	-5,52E-05	4,23E-06	-1,13E-08	-2,16E-07
Desvio Padrão	2,09E-03	1,66E-03	9,49E-07	9,49E-07
Assimetria	-0,9546	0	-1,03E+01	0,00E+00
Curtose	18,9552	4,2	130,6336	3
Percentil				
5%	-2,84E-03	-2,70E-03	-8,15E-07	-1,78E-06
10%	-1,78E-03	-2,01E-03	-3,88E-07	-1,43E-06
15%	-1,20E-03	-1,59E-03	-2,37E-07	-1,20E-06
20%	-8,33E-04	-1,27E-03	-1,54E-07	-1,02E-06
25%	-5,82E-04	-1,00E-03	-1,03E-07	-8,56E-07
30%	-4,20E-04	-7,73E-04	-7,09E-08	-7,14E-07
35%	-2,99E-04	-5,63E-04	-4,78E-08	-5,82E-07
40%	-2,12E-04	-3,68E-04	-3,09E-08	-4,57E-07
45%	-1,23E-04	-1,80E-04	-2,16E-08	-3,35E-07
50%	-5,52E-05	4,23E-06	-1,13E-08	-2,16E-07
55%	-7,18E-06	1,88E-04	-6,04E-09	-9,68E-08
60%	7,75E-05	3,76E-04	-3,54E-09	2,44E-08
65%	2,29E-04	5,72E-04	-1,50E-09	1,50E-07
70%	4,54E-04	7,81E-04	-8,22E-10	2,82E-07
75%	7,42E-04	1,01E-03	-3,14E-10	4,24E-07

Tabela 4: Estatísticas descritivas da *DnP* entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos NTN-B, com vencimento em 15/08/2010

DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	80%	1,04E-03	1,28E-03	-1,86E-10
85%	1,34E-03	1,59E-03	-8,50E-11	7,68E-07
90%	1,85E-03	2,02E-03	-2,58E-11	1,00E-06
95%	3,05E-03	2,70E-03	-1,35E-12	1,35E-06
Chi-Quadrado	n. a.	353,331	n. a.	1,13E+04
P-Valor	n. a.	0	n. a.	0

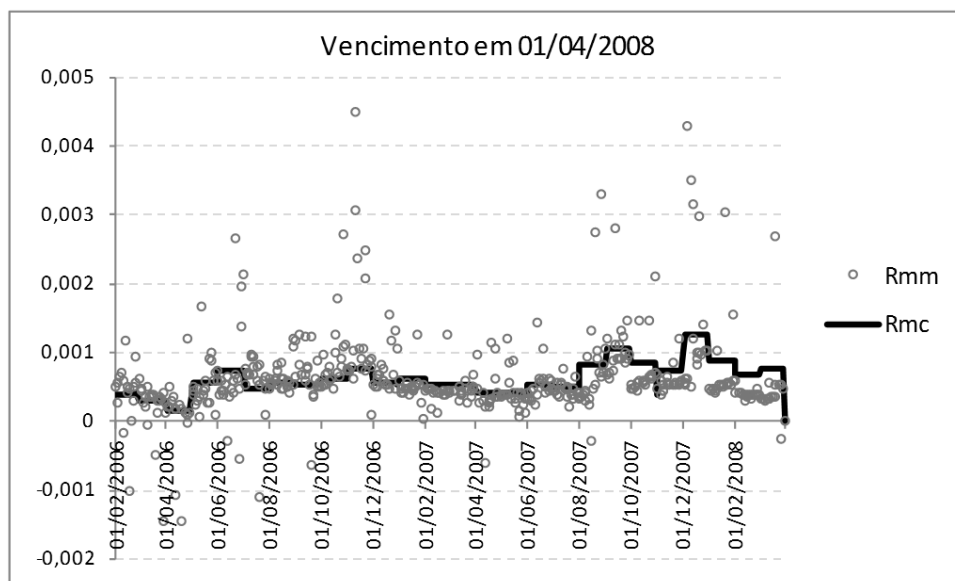
Fonte: Elaborado pelos autores.

Como pode-se observar, a expansão de Taylor baseada na *Duration* conjugada com a convexidade apresenta resultados que se aproximam dos indicados pela curva do título NTN-B, o que é condizente com o equilíbrio ressaltado por Hull (1997). Tal equilíbrio reflete a aproximação da curva de preço de um título frente a mudanças na taxa de juros, por meio do uso da *duration* e da convexidade, a partir de uma infinitesimal mudança na taxa de juros.

6.5. Notas do Tesouro Nacional tipo C (NTN-C)

Os títulos NTN-C são papéis pós-fixados com pagamento de cupons, cujo indexador é o índice de inflação IGP-M, de forma que garante ao investidor uma remuneração atrelada à variação do indexador acrescida de uma taxa fixa, delimitada na aquisição do título de renda fixa. Além disso, assim como para a NTN-B, a rentabilidade desse título pode ser obtida por meio da variação de seu preço no mercado secundário de títulos públicos, o que pode ser obtido no site da ANBIMA. As rentabilidades indicadas pela a marcação a mercado e marcação na curva da NTN-C com vencimento em 01/04/2008 são apresentadas na figura 10, a seguir.

Figura 10: Rentabilidade indicada pela marcação a mercado (Rmm) e marcação na curva (Rmc) dos títulos NTN-C, com vencimento em 01/04/2008.



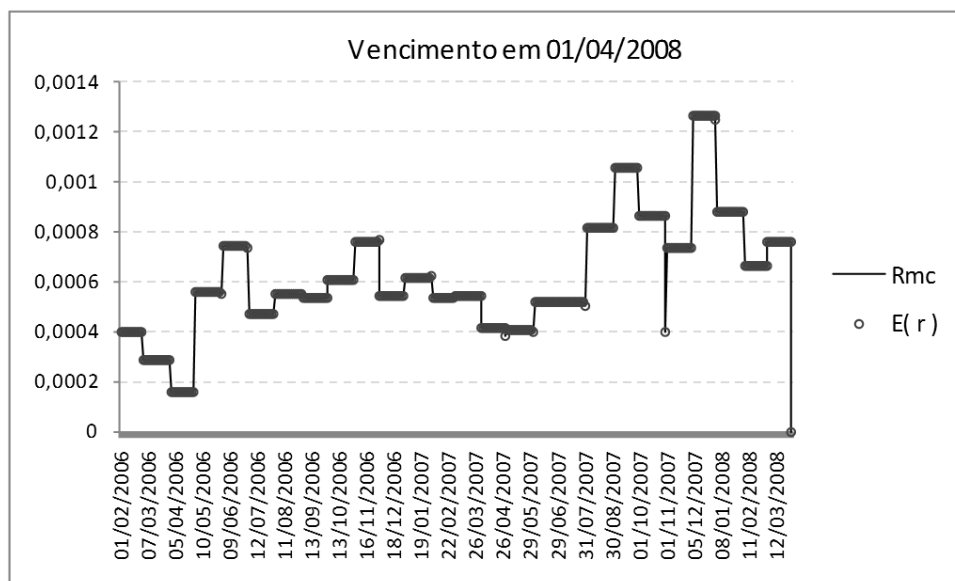
Fonte: Elaborado pelos autores.

Uma peculiaridade desses títulos NTN-C a ser considerada reside no fato de que eles se constituem em papéis que possuem pequena participação no mercado de títulos públicos brasileiros, inferior a 10% do mercado conforme ANBIMA (2010). Instituições financeiras que optaram pela marcação na curva de investimentos em NTN-C apresentaram uma volatilidade inferior na rentabilidade dessas aplicações frente a investidores que adotaram a marcação a mercado, sendo que essa diferença foi superior à apurada na NTN-B.

Assim, avaliações de riscos que seguiram a marcação na curva indicaram uma menor exposição a perdas do que as verificadas pela marcação a mercado, porém essa redução da exposição de risco por meio da utilização da marcação na curva de vencimento de uma NTN-C acarreta na necessidade de sua manutenção na carteira até o vencimento, ou possibilidade de liquidação mediante uma situação de extrema necessidade de liquidez do agente financeiro.

Por meio dos dados relativos à negociação dos títulos NTN-C, foram calculadas a *Duration*, a convexidade, a função para a rentabilidade decorrente da expansão de Taylor de 2º. Grau, a *DnP* e o desvio σ obtido para os resultados diários. Os resultados para a expansão de Taylor foram próximos aos verificados pela marcação na curva de vencimento, como pode ser observado na figura 11, a seguir:

Figura 11: Rentabilidade indicada pela expansão de Taylor ($E(r)$) e marcação na curva (R_{mc}) dos títulos NTN-C, com vencimento em 01/04/2008.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na tabela 5, a seguir, são destacados os resultados da DnP entre a marcação a mercado e a marcação na curva, assim como, uma comparação entre a rentabilidade aferida por meio da expansão de Taylor e o carregamento na curva.

Tabela 5: Estatísticas descritivas da DnP entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos NTN-C, com vencimento em 01/04/2008

DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
	Observada	Logística	Observada	Normal
Distribuição	Observada	Logística	Observada	Normal
Mínimo	-1,74E-03	-0,00268	-3,80E-07	$-\infty$
Máximo	3,74E-03	$+\infty$	0	$+\infty$
Média	3,74E-07	-3,33E-05	-3,96E-09	-3,96E-09
Moda	-7,61E-05	-9,64E-05	-7,82E-16	-3,96E-09
Mediana	-7,67E-05	-6,20E-05	-2,06E-10	-3,96E-09
Desvio Padrão	5,21E-04	3,95E-04	2,08E-08	2,08E-08
Assimetria	2,3033	0,7422	-12,6438	0

Tabela 5: Estatísticas descritivas da *DnP* entre a rentabilidade, segundo a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento e do ajuste pela expansão de Taylor dos títulos NTN-C, com vencimento em 01/04/2008

DnP	Entre marcação a mercado e marcação na curva		Entre a expansão de Taylor e a marcação na curva	
Curtose	14,4654	5,6149	208,3385	3
Percentil				
5%	-4,58E-04	-6,19E-04	-1,17E-08	-3,82E-08
10%	-3,95E-04	-4,90E-04	-4,66E-09	-3,07E-08
15%	-3,31E-04	-4,06E-04	-2,56E-09	-2,56E-08
20%	-2,83E-04	-3,41E-04	-1,65E-09	-2,15E-08
25%	-2,46E-04	-2,85E-04	-1,00E-09	-1,80E-08
30%	-1,95E-04	-2,36E-04	-6,95E-10	-1,49E-08
35%	-1,56E-04	-1,90E-04	-5,18E-10	-1,20E-08
40%	-1,28E-04	-1,47E-04	-3,58E-10	-9,24E-09
45%	-9,88E-05	-1,04E-04	-2,67E-10	-6,58E-09
50%	-7,67E-05	-6,20E-05	-2,06E-10	-3,96E-09
55%	-4,47E-05	-1,90E-05	-1,47E-10	-1,34E-09
60%	-1,30E-05	2,57E-05	-1,14E-10	1,32E-09
65%	1,75E-05	7,30E-05	-8,85E-11	4,07E-09
70%	5,88E-05	1,25E-04	-7,19E-11	6,97E-09
75%	1,05E-04	1,82E-04	-5,72E-11	1,01E-08
80%	1,55E-04	2,50E-04	-3,31E-11	1,36E-08
85%	2,73E-04	3,34E-04	-1,92E-11	1,76E-08
90%	4,68E-04	4,49E-04	-6,67E-12	2,28E-08
95%	7,46E-04	6,45E-04	-9,27E-13	3,03E-08
Chi-Quadrado	n. a.	73,3678	n. a.	5338,5397
P-Valor	n. a.	0	n. a.	0

Fonte: Elaborado pelos autores.

Como indicam os resultados da tabela 5, a expansão de Taylor baseada na *Duration* conjugada com a convexidade apresenta resultados que se aproximam dos indicados pela curva do título NTN-C, o que reflete o equilíbrio ressaltado por Hull (1997). Esse equilíbrio decorre da aproximação da curva de preço de um título frente a mudanças na taxa de aquisição, por meio do uso da *Duration* e da convexidade, a partir de uma infinitesimal mudança na taxa de desconto.

6.6. Análise dos Resultados

A partir do fato de que o preço de um título público, independentemente da técnica de avaliação, converge para o valor de resgate junto ao emissor na data de vencimento, foi utilizada uma aproximação de Taylor para analisar a diferença de resultados entre a marcação a mercado e o retorno definido pela curva de vencimento de cada título público. Essa expansão de Taylor seguiu o equacionamento apresentado na equação (17), indicando que o preço de um título público é influenciado: pelo tempo até o vencimento do contrato; pelas variações das taxas de juros no mercado financeiro; e pelo desvio do valor de marcação a mercado frente ao valor nominal da marcação na curva de vencimento.

Diante disso, por meio da mensuração da DnP entre as rentabilidades indicadas pela aplicação da marcação a mercado e da marcação na curva nos títulos públicos estudados, pode-se constatar a diferença nos resultados diários entre as duas técnicas de avaliação. Além disso, foram calculados dados diários de cada título sobre o prazo até o vencimento, a *Duration* e a convexidade.

Com a aplicação dessa abordagem quantitativa, foi verificado que o prazo até o vencimento ou maturidade T , a sensibilidade do preço do título a mudança na taxa de juros dada pela *Duration* $P'(F)$ e a variação dessa sensibilidade aferida pela convexidade $P''(F)$ captaram a divergência entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento dos títulos públicos pesquisados. Tal resultado foi condizente com a proposta da aproximação de Taylor, com o componente $P''(F) T / P'(F)$ reduzindo significativamente a divergência entre as rentabilidades diárias obtidas pelas técnicas de avaliação de títulos públicos.

Além disso, a distribuição de freqüência da DnP entre as rentabilidades diárias das técnicas de avaliação indicaram que a rentabilidade pela marcação a mercado se distribui ao redor do retorno diário indicado pela curva de vencimento. Ou seja, a marcação a mercado agrega volatilidade aos resultados de uma aplicação em títulos públicos federais, o que decorre da possibilidade de negociação desses títulos no mercado financeiro.

Como a utilização da aproximação de Taylor, considerando a *Duration*, a convexidade e a maturidade, reduziram consideravelmente a divergência entre as rentabilidades apuradas pelas técnicas de avaliação, pode-se considerar que verifica-se um movimento de reversão à média

entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento dos títulos públicos. Nesse sentido tem-se uma tendência de convergência da marcação a mercado para a rentabilidade indicada pela marcação na curva de vencimento, com essa tendência sendo identificada por meio da expansão de Taylor.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo contribuiu para a expansão do conhecimento com o diagnóstico e a mensuração da divergência entre as duas principais técnicas de avaliação de títulos públicos do mercado de renda fixa brasileiro. Junto a isso, analisou a percepção de agentes representativos do mercado secundário de títulos públicos federais brasileiros sobre possíveis divergências entre as técnicas de avaliação. Assim, pode-se constatar a convergência dos resultados para a rentabilidade diária obtida pelas diferentes técnicas pesquisadas e a implicação da utilização de cada uma delas, a saber, a volatilidade e a possibilidade de liquidação dos papéis pela adoção da marcação a mercado, e a manutenção da rentabilidade adquirida e a manutenção do título até o vencimento pela marcação na curva.

Cabe destacar a coerência da necessidade de manutenção em carteira de um título marcado na curva de vencimento, visto que a avaliação da rentabilidade será realizada pela promessa de rendimento do título e não pela variação de seu preço no mercado de renda fixa. O mesmo é válido para a marcação a mercado, pois como o título pode ser negociado a qualquer momento, a rentabilidade deve refletir a variação do preço do título no mercado secundário.

A contribuição para a teoria decorre da aplicação da expansão de Taylor conjugada com a DnP aos dados das rentabilidades diárias dos títulos públicos brasileiros. Tendo por base a convergência do valor na curva com o de mercado no vencimento do título público, por causa do resgate do papel junto à Secretaria do Tesouro Nacional, foi possível verificar que a convexidade, a *Duration* e a maturidade, fatores considerados no *VaR* de renda fixa, permitiram reduzir significativamente a divergência entre a marcação a mercado e a marcação na curva de vencimento para o cálculo da rentabilidade diária dos títulos públicos brasileiros.

Referências Bibliográficas

ANBIMA, Associação Nacional das Instituições do Mercado Financeiro. *Títulos Públicos*. Publicação contendo as principais características dos títulos públicos em poder do mercado, tais como indexadores, estoque em poder do público e base legal. Disponível em: <http://www.andima.com.br/tit_publicos/>. Acesso em: 15 mar. 2009.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.; HEALTH, D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.

- ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.; HEALTH, D. *Thinking coherently. Risk*, v. 10, n. 11, p. 68-71, nov./1997.
- BARROS, L. A. B. C. *Curso de Análise e Gestão de Riscos e Seguros*. Disponível em <http://www.atuarios.org/EAC0329/Aula6_AGRS.pdf> acessado em 06/09/2009.
- BASTIAN-PINTO, C. L.; BRANDÃO, L. E. T. Modelando opções de conversão com movimento de reversão à média. *Revista Brasileira de Finanças*, v. 5, n. 2, p. 97-124, 2007.
- BENNINGA, S. *Financial modeling*. Londres: MIT Press, 2000.
- CARCANO, N.; DALL'O, H. Alternative models for hedging yield curve risk: An empirical comparison. *Journal of Banking & Finance*, v. 35, p. 2991-3000, 2011.
- CONAPREV, Conselho Nacional dos Dirigentes de Regimes Próprios de Previdência Social. *nota técnica conjunta: sugestões às regras de regimes próprios de previdência social*. Brasília: Conaprev, 2009.
- CROUHY, M.; GALAI, D.; MARK, R. *Gerenciamento de risco: abordagem conceitual e prática: uma visão integrada dos riscos de crédito, operacional e de mercado*. São Paulo: Qualitymark; SERASA, 2004.
- HULL, J. C. *Opções, futuros e outros derivativos* 3. ed. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 1997.
- HULL, J. C.; WHITE, A. One-Factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 28, n. 2, p. 235-254, jun. 1990.
- LAJILI, S.; RAKOTONDRATSIMBA, Y. *Enhancement of the Bond Duration-Convexity Approximation. International Journal of Economics and Finance*, v. 4, n. 3, p. 115-125, 2012.
- PENA, M. A Convergência do VaR para a DnP normalizada. In: 26º CONGRESSO BRASILEIRO DOS FUNDOS DE PENSÃO, 2005, Porto Alegre. *Anais...* Porto Alegre: Abrapp, 2005.
- ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S.; ZABARANKIN, M. Portfolio analysis with general deviation measures. *Research Report*, Florida, v. 2003, n. 8, 2003.
- STN, Secretaria do Tesouro Nacional. Tesouro Nacional. *Informações sobre títulos públicos, vantagens, perfil do investimento e indicadores da dívida pública*. Disponível em: <http://www.tesouro.fazenda.gov.br/tesouro_direto/perfil_investimento.asp>. Acesso em: 10 abr. 2009.

VIEIRA NETO, C. A. *Modelagem da estrutura a termo da taxa de juros e avaliação de contratos derivativos*. 1999. 179f. Tese (Doutorado em Economia) – Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 1999.

Recebido em 25/02/2013 Aprovado em 01/08/2013 Disponibilizado em 13/08/2013 Avaliado pelo sistema <i>double blind review</i>

Ferreira, Ricardo Bruno Pérez; Barbosa, Francisco Vidal (2013). Marcação a Mercado e Marcação na Curva de Vencimento de Títulos Públicos Brasileiros: Aplicação da Expansão de Taylor na Divergência entre as Rentabilidades Aferidas pelas Referidas Técnicas de *Valuation*.. Revista de Finanças Aplicadas. Publicado em 13ago13, pp.1-31.